

# SCHALLABSTRAHLUNG VON PLATTEN BEI PUNKTFÖRMIGER ANREGUNG

von M. HECKL

Mitteilung aus dem Institut für Technische Akustik der Technischen Universität  
Berlin-Charlottenburg

## Zusammenfassung

Eine unendlich große Platte, die zu ebenen ungedämpften Biegewellen angeregt wird, strahlt keine Schallenergie ab, wenn die Biegewellenlänge kleiner ist als die Luftwellenlänge. Wird die Platte jedoch punktförmig angeregt, dann bewirkt das exponentiell abklingende „Biegewellen-Nahfeld“ eine endliche, wenn auch sehr geringe Schallabstrahlung, deren Größe berechnet wird. Es wird gezeigt, daß das so erhaltene Ergebnis auch auf gedämpfte Platten endlicher Größe anwendbar ist. Bei endlichen Platten mit sehr kleiner Dämpfung wird dagegen die Abstrahlung durch einen anderen Effekt bestimmt. Es wird auch für diesen Fall die abgestrahlte Leistung berechnet. Die abgeleiteten Formeln lassen sich durch Messungen bestätigen.

## Summary

An infinitely wide plate, set into damped flexural vibrations, radiates no sound energy if the wave-lengths in the plate are smaller than those in the air. If the plate is excited at a point, then the exponentially decaying „flexural wave near field“ gives a small finite radiation, whose value is calculated. It is shown that the same relation holds for damped plates of finite size, but if the damping is small the radiation is determined by a different effect which is also calculated. The resulting formulae can be checked by experiment.

## Sommaire

Une grande plaque indéfinie, excitée de façon à produire des ondes de flexion planes non amorties, ne rayonne aucune énergie sonore si la longueur d'onde des ondes de flexion est inférieure à celle des vibrations de l'air. Cependant, si la plaque est excitée ponctuellement «le champ au voisinage des ondes de flexion» produit un rayonnement sonore fini quoique très faible, dont l'intensité est calculée. On montre que le résultat ainsi obtenu est applicable également à des plaques amorties de dimensions finies. Pour des plaques de dimensions finies avec un très faible amortissement, le rayonnement est déterminé à l'aide d'un autre effet. On calcule aussi dans ce cas l'énergie rayonnée. Les formules obtenues sont confirmées par des mesures.

## 1. Einleitung

Die Schallabstrahlung von schwingenden Platten ist bekanntlich sehr gering, wenn die Biegewellenlänge kleiner ist als die Luftwellenlänge (siehe L. CREMER [1], J. BRILLOUIN [2]). Dieser Effekt läßt sich am deutlichsten an Hand einer unendlich großen Platte zeigen, wenn deren Schnelle durch

$$v(x) = v_0 e^{\pm i k_B x} \quad (1)$$

gegeben ist, wobei

$$k_B = \sqrt[4]{\omega^2 \rho h/B} \quad (1a)$$

die Biegewellenzahl ist ( $\rho$  Dichte,  $h$  Dicke,  $B$  Biegesteife der Platte,  $\omega$  Kreisfrequenz).

Es wird hier und im folgenden angenommen, daß die Platte nur Schwingungen einer Frequenz ausführt. Aus diesem Grunde wird der Zeitfaktor  $e^{i\omega t}$  stets weggelassen.

Eine Berechnung der Abstrahlung ergibt, daß stets dann, wenn die Biegewellenlänge kleiner ist als die Luftwellenlänge sich in der Nähe der Platte nur ein Luftschall-Nahfeld ausbildet, daß aber keine Schalleistung abgestrahlt wird. Der physikalische Grund für diesen Effekt ist die Tatsache, daß die Luft im wesentlichen nur von Wellenberg zu Wellental verschoben wird (Pfeile in Bild 1a), und daß deswegen Schalldruck und die zur Wand senkrechte Komponente der Schallschnelle stets genau um  $90^\circ$  phasenverschoben sind.

Ist dagegen die Luftwellenlänge kleiner als die Biegewellenlänge, dann wird eine Schalleistung abgestrahlt. Dieser Fall soll jedoch hier nicht interessieren. Es wird stets angenommen, daß die Biegewellenlänge kleiner ist als die Luftwellenlänge, also die schwingende Platte sehr biegeweich ist.

Man kann aus Bild 1a bereits entnehmen, daß der „Kurzschluß“ nicht mehr vollständig ist, wenn die abstrahlende Platte eine endliche Fläche hat. In

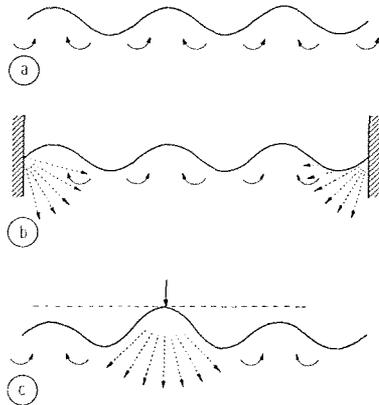


Bild 1. Abstrahlverhalten von Platten.

- (a) Abstrahlung von einer unendlich großen Platte, wenn die Schnelle durch Gl. (1) gegeben ist.  
 (b) Abstrahlung von einer Platte endlicher Fläche.  
 (c) Abstrahlung von einer unendlich großen Platte, wenn die Schnelle durch Gl. (3) gegeben ist.

(Die gebogenen Pfeile sollen die Luftverschiebung, die punktierten die Abstrahlung andeuten.)

diesem Fall ist am Rande der Ausgleich gestört und es wird eine Schalleistung abgestrahlt (siehe Bild 1 b). Die Abstrahlung von endlichen Platten, deren Schnelle durch Gl. (1) beschrieben werden kann, wurde quantitativ von K. GÖSELE [3] untersucht. Er erhielt für den hier allein interessierenden Fall, daß die Biegewellenlänge kleiner ist als die Luftwellenlänge, bzw., daß die Wellenzahl in Luft  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$  größer ist als  $k_B$ , für die pro Breiten-einheit abgestrahlte Leistung:

$$P_b = \frac{\rho_0 c_0}{2} v_0^2 \frac{k_0}{k_B^2} \quad (2)$$

( $\rho_0 c_0$  Wellenwiderstand der Luft)<sup>1</sup>.

Eine andere Möglichkeit, bei der die abgestrahlte Leistung von Null verschieden ist, liegt vor, wenn die Amplituden der Schwingungen der Platte nicht mehr gleich sind, z. B. wenn die Wellen gedämpft sind. Dieser Fall wurde von K. GÖSELE [12] und W. WESTPHAL [4] untersucht. Sie erhielten eine von der Dämpfung der Platte abhängige Abstrahlung.

Ungleiche Schwingungsamplituden von unendlich großen Platten hat man aber nicht nur, wenn Dämpfung vorliegt, sondern auch, wenn die Anregung durch eine Punktkraft erfolgt. Bekanntlich erzeugt eine Punktkraft nicht nur fortlaufende Biegewellen, deren Schwingungsform im einfachsten Fall durch

Gl. (1) geschrieben werden kann, vielmehr entsteht auch in der Nähe der Anregestelle ein quasistationäres Nahfeld, das exponentiell abklingt. Aus diesem Grunde ist im eindimensionalen Fall die Schwingungsamplitude an der Anregestelle doppelt so groß wie die Amplitude in einiger Entfernung (siehe Bild 1 c). Wenn die anregende Kraft an der Stelle  $x=0$  wirkt und die Platte in  $y$ -Richtung beliebig groß ist, d. h. wenn die Anregung durch eine „Linienkraft“ erfolgt, kann man die Schnelle einer unendlich großen Platte durch

$$v(x) = v_0 (e^{\pm i k_B x} + e^{\pm k_B x}) \quad (3)$$

ausdrücken (siehe L. CREMER [7]). (Das positive Vorzeichen gilt für  $x < 0$ , das negative für  $x > 0$ .) Es leuchtet ein, daß wegen des Nahfeldes eine punktförmig angeregte, unendlich große Platte eine Schalleistung abstrahlen muß (siehe Bild 1 c).

Schließlich bleibt noch der Fall der punktförmig angeregten endlichen Platte zu betrachten, bei der, grob gesprochen, die Abstrahlung des Biegewellen-nahfeldes und der Randeinfluß, also eine Kombination von Bild 1 b und 1 c, vorhanden sind.

## 2. Berechnung der von einer punktförmig angeregten, unendlich großen Platte abgestrahlten Schalleistung

### 2.1. Eindimensionale Betrachtung

Am einfachsten läßt sich das Problem eindimensional behandeln. Eine unendlich große Platte werde also längs einer Linie ( $x=0$ ) durch eine Kraft  $F_0$  angeregt; die in den Halbraum  $z > 0$  abgestrahlte Leistung ist gesucht. In  $y$ -Richtung soll alles gleich sein.

Es empfiehlt sich in diesem Fall, die Schnelle der Platte in Form eines Fourier-Integrals

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(k) e^{ikx} dk \quad (4)$$

darzustellen. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß man mit der transformierten Funktion  $\tilde{v}(k)$  sehr leicht rechnen kann, da Gl. (4) einer Analyse nach Schwingungen der Art von Gl. (1) entspricht, für die die Abstrahlung bereits bekannt ist.

Wenn die Schnelle  $v(x)$  bekannt ist, ergibt sich  $\tilde{v}(k)$  nach der Gleichung

$$\tilde{v}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-ikx} dx. \quad (4a)$$

Es liegt nahe, für den abgestrahlten Schalldruck  $p$  einen ähnlichen Ansatz zu machen, der natürlich auch die Abhängigkeit in  $z$ -Richtung enthalten muß. Setzt man

<sup>1</sup> In jüngster Zeit wurde dasselbe Problem noch einmal von E. SKUDRZYK [16] nach der gleichen Methode behandelt.

$$p(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(k) e^{ikx} e^{ik_z z} dk, \quad (5)$$

dann folgt aus der Wellengleichung  $\Delta p + k_0^2 p = 0$  unmittelbar

$$k_0^2 = k^2 + k_z^2. \quad (6)$$

Aus der Randbedingung

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial z} \right]_{z=0} = i \omega \varrho_0 v(x), \quad (7)$$

die besagt, daß an der Plattenoberfläche die Schnelle der Luft und der Platte gleich sein müssen, ergibt sich

$$\tilde{p}(k) = \tilde{v}(k) \varrho_0 c_0 \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k^2}}. \quad (8)$$

Die Gleichung für die je Breitereinheit abgestrahlte Schalleistung lautet bekanntlich

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \int_{-\infty}^{\infty} p v^* dx \right) \quad (9)$$

( $v^*$  konjugiert komplexer Wert von  $v$ ).

Setzt man hier Gl. (4) und (5) ein, so folgt

$$P_b = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(k) \tilde{v}^*(k') \left[ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx \right] dk dk' \right\}. \quad (10)$$

Das Integral in den eckigen Klammern stellt aber bis auf den Faktor  $2\pi$  die Diracsche Deltafunktion  $\delta(k-k')$  dar (siehe z. B. LIGHTHILL [5]), die mit Ausnahme der Stelle  $k=k'$  überall verschwindet. Setzt man nun noch Gl. (8) in (10) ein, so erhält man wegen

$$\operatorname{Re}(k_0/\sqrt{k_0^2 - k^2}) = 0 \quad \text{für } |k| > k_0$$

den Ausdruck

$$P_b = \frac{1}{2} \varrho_0 c_0 \int_{-k_0}^{k_0} |\tilde{v}(k)|^2 \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k^2}} dk. \quad (11)$$

Damit ist das Problem auf die Durchführung einer Fourier-Transformation und auf eine Integration zurückgeführt.

Gl. (11) gilt allgemein für beliebige Schnelleverteilungen; man muß nur  $\tilde{v}(k)$  nach Gl. (4a) berechnen. So kann man z. B. die von K. GÖSELE [3] erhaltenen Ergebnisse auch nach der eben beschriebenen Methode gewinnen. Das Verfahren hat übrigens auch den Vorteil, daß es sich ohne Schwierigkeiten — unter Benutzung der zweidimensionalen Fourier-Transformation — auch auf den zweidimensionalen Fall erweitern läßt. Dieser Weg wird in Abschnitt 2.2 jedoch nicht beschritten, weil es sich dort um ein radialsymmetrisches Problem handelt.

Für den hier untersuchten Fall einer anregenden Linienkraft kann man sich die Transformation

ersparen, weil sich  $\tilde{v}(k)$  direkt aus der Biegewellengleichung

$$\Delta \Delta v(x) - k_B^4 v(x) = \frac{i\omega}{B} F_0 \delta(x) \quad (12)$$

unter Berücksichtigung der anregenden Kraft ergibt, wenn man für  $v(x)$  Gl. (4) einsetzt und  $\delta(x)$  ebenfalls in Form eines Fourier-Integrals schreibt. Man erhält auf diese Weise

$$\tilde{v}(k) = \frac{F_0}{2\pi B(k^4 - k_B^4)} \frac{i\omega}{k}. \quad (13)$$

Die Vertauschung von Integration und Differentiation, die man dabei vornimmt, ist nur zulässig, wenn  $v(x)$  nebst seinen Ableitungen im Unendlichen verschwindet (siehe z. B. I. N. SNEDDON [6]). Setzt man Gl. (13) in (11) ein, dann ergibt sich

$$P_b = \frac{\varrho_0 c_0 \omega^2 F_0^2}{4\pi B^2} \int_{-k_0}^{k_0} \frac{k_0}{|k^4 - k_B^4|^2 \sqrt{k_0^2 - k^2}} dk. \quad (14)$$

Es interessiert hier nur der Fall  $k_B \gg k_0$ , also auch  $k_B \gg k$ . Damit wird aus Gl. (14) näherungsweise

$$P_b \approx \frac{\varrho_0 c_0}{4} \frac{k_0}{\omega^2 \varrho^2 h^2} F_0^2. \quad (15)$$

Da im eindimensionalen Fall der sog. Eingangswiderstand (siehe L. CREMER [7]) durch  $F_0/v(0) = k_B(1-i)/4\omega\varrho h$  gegeben ist, kann man Gl. (15) auch in der Form

$$P_b = 2 \varrho_0 c_0 |v(0)|^2 k_0/k_B^2 \quad (15a)$$

schreiben.

Damit hat man den gewünschten Zusammenhang zwischen anregender Kraft bzw. Schnelle am Anregungsort und der abgestrahlten Schalleistung.

Wie man aus den Gl. (15) und (15a) ersieht, ist die abgestrahlte Leistung sehr klein und unabhängig von der Frequenz, wenn die Schnelle am Anregungsort konstant ist.

## 2.2. Zweidimensionale Betrachtung

Die eben gemachte Ableitung läßt sich ohne große Schwierigkeiten auch auf den zweidimensionalen Fall erweitern; d. h., es soll die Anregung nicht längs einer Linie, sondern wirklich nur an einem Punkt erfolgen. In diesem Fall ist die Schnelle  $v(r)$  radialsymmetrisch, und es empfiehlt sich, die sogenannte Hankel-Transformation [6] zu benutzen, d. h. die Schnelle der Platte durch

$$v(r) = \int_0^{\infty} \tilde{v}(k_r) J_0(k_r r) k_r dk_r \quad (16)$$

und den Schalldruck durch

$$p(r, z) = \int_0^{\infty} \tilde{p}(k_r) J_0(k_r r) k_r e^{ik_z z} dk_r \quad (16a)$$

auszudrücken. Eine Ableitung, die vollkommen analog zu Gl. (5) bis (11 a) geht, liefert dann für die gesamte abgestrahlte Leistung

$$P = \pi \varrho_0 c_0 \int_0^{k_0} |\tilde{v}(k_r)|^2 \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}} k_r dk_r. \quad (17)$$

Diese Gleichung gilt ähnlich wie Gl. (11) für beliebige Schnelleverteilungen, sofern sie nur radial-symmetrisch sind. Man muß dazu nur  $\tilde{v}(k_r)$  aus der gegebenen Schnelleverteilung durch die entsprechende Rücktransformation berechnen.

Man kann sich diese mühsame Arbeit auch in diesem Falle ersparen, wenn man auf die Biegewellengleichung zurückgeht und die anregende Punktkraft  $F$  in Form einer Hankel-Transformation schreibt.

Die Biegewellengleichung unter Berücksichtigung der Anregung lautet

$$\Delta \Delta v(r) - k_B^4 v(r) = p_A i \omega / B, \quad (18)$$

wobei  $p_A = 0$  für  $r > 0$  und  $\int_0^\infty p_A 2\pi r dr = F$  ist.

Unter gewissen Bedingungen, die hier erfüllt sind, kann man Gl. (16) in (18) einsetzen und Integration und Differentiation vertauschen. Da außerdem

$$p_A = \int_0^\infty J_0(k_r r) \tilde{p}_A(k_r) k_r dk_r$$

$$\text{mit} \quad \tilde{p}_A(k_r) = \int_0^\infty p_A J_0(k_r r) r dr = F/2\pi$$

gesetzt werden kann, erhält man aus Gl. (18)

$$(k_r^4 - k_B^4) \tilde{v}(k_r) = \frac{i \omega}{B} \frac{F}{2\pi}. \quad (19)$$

(Durch Einsetzen von Gl. (19) in (16) erhält man übrigens den bekannten Eingangswiderstand für punktförmig angeregte Platten.) Setzt man Gl. (19) in (17) ein, so folgt unter der Voraussetzung  $k_B \gg k_0$

$$P = \frac{\varrho_0 c_0}{4\pi} F^2 \frac{k_0^2}{\omega^2 \varrho^2 h^2} = \frac{16}{\pi} \varrho_0 c_0 |v(r=0)|^2 \frac{k_0^2}{k_B^4}. \quad (20)$$

Es wurde dabei  $F/v(r=0) = 8\sqrt{B\varrho h}$  gesetzt (siehe C. ZENER [13] und H. und L. CREMER [14]).

Wie man sieht, ist in diesem Fall die abgestrahlte Leistung frequenzunabhängig, wenn die Schnelle am Anregeort oder die anregende Kraft konstant sind.

Es erscheint lohnenswert, an dieser Stelle die vom Biegewellennahfeld abgestrahlte Leistung mit der Abstrahlung einer Kolbenmembran in einer unendlich großen starren Wand zu vergleichen. Wenn der Radius  $a$  des Kolbens klein ist, verglichen mit der Luftwellenlänge, gilt bekanntlich (siehe z. B. [8], Kap. VII, 28)

$$P_K = \frac{\varrho_0 c_0}{4} v_0^2 k_0^2 a^4.$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. (20), so sieht man, daß die Abstrahlung einer Kolbenmembran, deren Radius ein Viertel der Biegewellenlänge ist, genau so groß ist, wie die Abstrahlung vom Biegewellennahfeld. Aus diesem Vergleich erkennt man bereits, daß ein anregendes System nur dann als punktförmig anzusehen ist, wenn sein Radius kleiner ist als ein Zehntel der Biegewellenlänge. Andernfalls wirkt der an das anregende System angeschlossene Teil der Platte fast wie eine Kolbenmembran, und die Abstrahlung des Biegewellennahfeldes ist nurmehr ein Nebeneffekt (siehe Ende von Abschnitt 4.1 und Bild 8).

Mit dem oben angewandten Verfahren läßt sich übrigens auch die Abstrahlung von gedämpften Platten berechnen; man braucht dazu nur  $k_B$  komplex anzusetzen. Für den hier interessierenden Fall  $k_B > k_0$  ergeben sich aber keine großen Unterschiede zu Gl. (20).

Schließlich läßt sich auch noch die Strahlungsdämpfung berechnen. Man muß dazu nur berücksichtigen, daß der Schalldruck auch auf die Platte zurückwirkt. Also wird aus Gl. (18)

$$\Delta \Delta v(r) - k_B^4 v(r) = \frac{i \omega}{B} [p_A - p(r, z=0)]$$

( $p_A$  siehe Bemerkung nach Gl. (18)). Führt man nun wieder die Transformation durch, dann erhält man

$$(k_r^4 - k_B^4) \tilde{v}(k_r) = \frac{i \omega}{B} \left[ \frac{F}{2\pi} - \tilde{p}(k_r) \right].$$

Nun besteht aber zwischen der Schnelle an der Plattenoberfläche und dem Schalldruck die Beziehung

$$\tilde{p}(k_r) = \tilde{v}(k_r) \frac{k_0 \varrho_0 c_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}};$$

(diese Gleichung ergibt sich aus Gl. (16) und (16 a) analog zu Gl. (8)); man kann also

$$\left( k_r^4 - k_B^4 + \frac{i \omega}{B} \frac{k_0 \varrho_0 c_0}{\sqrt{k_0^2 - k_r^2}} \right) \tilde{v}(k_r) = \frac{i \omega}{B} \frac{F}{2\pi}$$

schreiben. Daraus ersieht man, daß für  $k_B < k_0$  der durch die Strahlungsdämpfung erzeugte „Verlustfaktor“, d. h. das Verhältnis von der innerhalb einer Schwingung abgestrahlten Energie zur gesamten Schwingungsenergie durch

$$\eta_s \approx \frac{\varrho_0 c_0}{\omega \varrho h} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_B^2}}$$

gegeben ist.

Eine weitere Rechnung zeigt dann auch noch, daß die gesamte abgestrahlte Leistung gleich der am Anregeort in die Platte fließenden mechanischen Leistung ist, wenn keine Materialdämpfung vorhanden ist. Dieses Ergebnis ist auf Grund einer Energiebilanz auch zu fordern.

### 3. Abstrahlung von punktförmig angeregten Platten endlicher Fläche

#### 3.1. Allgemeine Überlegungen

Die Biegeschwingungen einer Platte lassen sich ganz allgemein als Summe von Eigenfunktionen  $\varphi_n$  darstellen (siehe z. B. A. SCHUCH [9]); d. h.

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} v_n \varphi_n. \quad (21)$$

Die Größen  $v_n$  ergeben sich dabei aus der Art der Anregung und den Platteneigenschaften. Wenn nun die Abstrahlung in einen Quader erfolgt, bei dem eine Seite durch die Platte gegeben ist, die gegenüberliegende Seite vollkommen schallschluckend ist

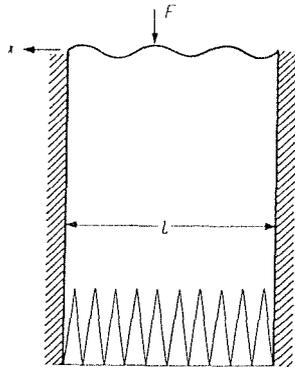


Bild 2. Modell zur Berechnung der Abstrahlung von Platten endlicher Fläche.

und die übrigen Seiten schallhart sind (siehe Bild 2), dann läßt sich auch der abgestrahlte Schalldruck als Summe von Eigenfunktionen  $\psi_m$  darstellen (siehe z. B. [10]). Also gilt

$$p = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \psi_m e^{i k_{zm} z}. \quad (22)$$

( $k_{zm}$  ergibt sich aus  $\psi_m$  und der Wellengleichung in Luft.) Aus der Randbedingung (7) erhält man unter Benutzung der Orthogonalitätsrelation der Eigenfunktionen

$$p_m = \frac{\omega \varrho_0}{k_{zm}} \frac{\int_S v \psi_m dS}{\int_S \psi_m^2 dS}. \quad (23)$$

Dabei ist  $S$  die Fläche der Platte und  $dS$  ein Flächenelement. Die abgestrahlte Leistung wird dann

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{m=0}^{\infty} p_m \sum_{n=0}^{\infty} v_n^* \int_S \varphi_n \psi_m dS \right).$$

(Dabei ist angenommen, daß  $\varphi_n$  und  $\psi_m$  reell sind.) Setzt man hierin Gl. (23) ein, so folgt

$$P = \frac{\varrho_0 c_0}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\int_S \psi_m^2 dS} \times \operatorname{Re} \left( \frac{k_0}{k_{zm}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} v_n \int_S \varphi_n \psi_m dS \right| \right). \quad (24)$$

Für den Fall einer anregenden Punktkraft  $F$  gilt für die Größen  $v_n$  die Gleichung (siehe z. B. [9])

$$v_n = \frac{i \omega F}{\varrho h (\underline{\omega}_n^2 - \omega^2)} \frac{\varphi_n(A)}{\int_S \varphi_n^2 dS}, \quad (25)$$

wobei  $\varphi_n(A)$  der Wert der Eigenfunktion an der Anregerstelle ist.  $\underline{\omega}_n^2 = \omega_n^2 (1 + i \eta)$  stellt das Quadrat der komplexen Eigenfrequenzen der Platte dar.  $\eta$  ist der Verlustfaktor des Plattenmaterials, der sich aus dem komplexen Anteil der Biegesteife (bzw. des Elastizitätsmoduls) nach der Gleichung

$$\underline{B} = B(1 + i \eta) \quad (25 a)$$

ergibt.

Würde man Gl. (25) in Gl. (24) einsetzen, so hätte man noch die Abhängigkeit von der willkürlichen Anregerstelle. Da man bei Messungen jedoch stets an mehreren Stellen anregt und die abgestrahlte Leistung mittelt, empfiehlt es sich, auch Gl. (24) für alle Anregerorte zu mitteln. Es ergibt sich auf diese Weise

$$P = \frac{\varrho_0 c_0}{2} \frac{F^2}{\varrho^2 h^2 S} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( \int_S \varphi_n \psi_m dS \right)^2}{\int_S \varphi_n^2 dS \int_S \psi_m^2 dS} \times \frac{\omega^2}{|\underline{\omega}_n^2 - \omega^2|^2} \operatorname{Re} \left( \frac{k_0}{k_{zm}} \right). \quad (26)$$

#### 3.2. Untersuchung des eindimensionalen Falles

Die im letzten Abschnitt abgeleiteten Gleichungen gelten für punktförmig angeregte Platten beliebiger Form. Für weitere Rechnungen muß man jedoch Annahmen über die Form und die Randbedingungen der Platte machen. Es sei wieder zuerst der eindimensionale Fall betrachtet. Weiterhin sei angenommen, daß die Platte der Länge  $l$  an den Rändern drehbar gelagert ist. In diesem Fall gilt (siehe z. B. [10])

$$\varphi_n = \sin \frac{n \pi}{l} x, \quad \psi_m = \cos \frac{m \pi}{l} x, \quad (27)$$

$$k_{zm} = \sqrt{k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{l^2}}.$$

Setzt man diese Gleichungen in Gl. (26) ein, so ergibt sich für die je Breitereinheit abgestrahlte Leistung

$$P_b = \frac{\varrho_0 c_0}{2} \frac{16 F_0^2}{\pi^2 \varrho^2 h^2 l} \sum_{m=0}^{m'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 - m^2)^2} \times \frac{\omega^2}{|\underline{\omega}_n^2 - \omega^2|^2} \sqrt{\frac{k_0}{k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{l^2}}} \quad (28)$$

für  $m + n$  ungerade.

In dieser Gleichung wird die Summation nur bis  $m'$  ausgeführt, wobei  $m'$  die dem Wert  $k_0 l / \pi$  am näch-

sten gelegene kleinere ganze Zahl ist. Für  $m > m'$  ist nämlich nach Gl. (27)

$$\operatorname{Re}(k_0/k_{zm}) = 0.$$

Es empfiehlt sich nun, die Summation in zwei Stufen durchzuführen, und zwar erst für die Schwingungen der Platte, deren Wellenlänge größer ist als die Luftwellenlänge, d. h. für  $n < k_0 l/\pi$ , und dann für die Biegeschwingungen, für die  $n > k_0 l/\pi$  ist. Die Grenze sei  $n'$ . Es sei also

$$P_b = \operatorname{const} \sum_{m=0}^{m'} \sum_{n=1}^{n'} \dots + \operatorname{const} \sum_{m=0}^{m'} \sum_{n=n'+1}^{\infty} = P_{b1} + P_{b2}. \quad (29)$$

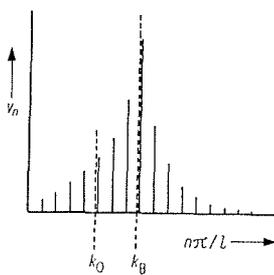


Bild 3 soll verdeutlichen, welchen Sinn diese Aufteilung hat. Es sind in diesem Bild die Größen  $v_n$  über  $n\pi/l$  für

Bild 3. Amplituden der Teilwellen einer punktförmig angeregten Platte.

eine punktförmig angeregte Platte aufgetragen. Die Hüllkurve hat, wie aus Gl. (25) zu ersehen ist, die Form einer Resonanzkurve. Eine kleine Umrechnung zeigt auch, daß das Maximum an der Stelle  $k_B = n\pi/l$  liegt. Es interessiert hier nur der Fall  $k_0 < k_B$ ; das bedeutet, daß die Aufteilung an einer links von  $k_B$  gelegenen Stelle erfolgt und daß  $P_{b2}$  die Abstrahlung der hauptsächlich angeregten Eigenschwingungen erfaßt, während  $P_{b1}$  die Abstrahlung der nur wenig angeregten Eigenschwingungen berücksichtigt, die jedoch wegen ihrer großen Wellenlänge gut abgestrahlt werden.

Bei der Berechnung von  $P_{b1}$  kann man annehmen, daß  $\omega^2 \gg \omega_n^2$  ist; denn unter den eben genannten Bedingungen sind die Resonanzfrequenzen der Eigenschwingungen mit  $n < n'$  stets kleiner als die anregende Frequenz (siehe Bild 3). Aus Gl. (28) und (29) wird somit

$$P_{b1} = \operatorname{const} \frac{1}{\omega^2} \sum_{m=0}^{m'} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{l^2}}} \sum_{n=1}^{n'} \frac{n^2}{(n^2 - m^2)^2} \quad (30)$$

für  $m+n$  ungerade.

Da  $m' = n'$  ist, werden die den Wert der zweiten Summe hauptsächlich bestimmenden Glieder mit  $n \approx m$  auch tatsächlich angenommen. Man vergrößert daher den Wert der Summe nur wenig, wenn man auch die Glieder mit  $n > n'$  hinzunimmt. Die Summe läßt sich dann funktionentheoretisch auswerten (siehe z. B. [10]) und ergibt  $\pi^2/16$ .

Die noch verbleibende Summation über  $m$  ist nicht so leicht durchzuführen, weil für  $m = k_0 l/\pi$

die Summe unendlich wird. Der Wert  $m = k_0 l/\pi$  kann tatsächlich angenommen werden und zwar dann, wenn die anregende Frequenz zu einer Eigenresonanz des Luftraumes vor der Platte führt. Die Schwierigkeit läßt sich umgehen, wenn man — was in der Praxis meist der Fall ist — zur Anregung ein Frequenzgemisch der Breite  $\Delta\omega = c_0 \Delta k_0$  benutzt und über das Frequenzband mittelt. Damit wird aus Gl. (30)

$$P_{b1} \approx \operatorname{const} \frac{\pi^2}{16} \frac{1}{\Delta k_0} \sum_{m=0}^{m'} \int \frac{1}{\omega^2} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{l^2}}} dk_0. \quad (31)$$

Führt man erst die Integration durch, dann bleiben die Summanden endlich, und man kann die Summation vornehmen. Es ergibt sich dabei

$$P_{b1} \approx \frac{\varrho_0 c_0}{4} \frac{F_0^2 k_0}{\varrho^2 h^2 \omega^2}. \quad (32)$$

Wie man sieht, sind die Gl. (15) und (32) gleich. Das bedeutet, daß die Abstrahlung der Teilwellen mit  $n < k_0 l/\pi$  etwa der Abstrahlung des BiegeWellenfeldes entspricht<sup>2</sup>.

Bei der Berechnung von  $P_{b2}$  kann man davon ausgehen, daß stets  $m < n$  ist. Dies gilt speziell für  $k_B > 2k_0$ . Damit wird

$$P_{b2} \approx \operatorname{const} \sum_{n=n'}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\omega^2}{|\omega_n^2 - \omega^2|^2} \sum_{m=0}^{m'} \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - \frac{m^2 \pi^2}{l^2}}} \quad (32a)$$

für  $m+n$  ungerade.

Auch hier läßt sich die Summation über  $m$  wieder durchführen, wenn man über ein anregendes Frequenzband mittelt. Man hat dabei nur zu beachten, daß alle drei Faktoren hinter der Summe von der Frequenz abhängen. Die Rechnung ergibt, wenn man der Forderung  $n+m$  ungerade einfach durch Halbierung von Gl. (32a) Rechnung trägt,

$$P_{b2} \approx \operatorname{const} \sum_{n=n'}^{\infty} \frac{1}{\Delta k_0} \int \frac{1}{n^2} \frac{\omega^2}{|\omega_n^2 - \omega^2|^2} \frac{k_0 l}{4} dk_0.$$

Nun gilt aber nach Gl. (25) und (25a) für die mittlere Schnelle einer mit einem Frequenzgemisch der Breite  $\Delta\omega$  angeregten Platte

$$\bar{v}^2 = \frac{1}{\Delta\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_0^2}{\varrho^2 h^2 l^2} \int \frac{\omega^2}{|\omega_n^2 - \omega^2|^2} d\omega. \quad (34)$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (33) ein, so folgt schließlich

$$P_{b2} \approx 2 \varrho_0 c_0 \bar{v}^2 k_0/k_B^2. \quad (35)$$

<sup>2</sup> In einer kürzlich erschienenen Arbeit hat E. SKUDNÝK [16] auch die Abstrahlung von Platten behandelt. Allerdings würde die von ihm gewählte Methode zu einem anderen Ergebnis führen, weil nicht berücksichtigt wird, daß auch die Teiltöne niederer Ordnung verschieden stark abgestrahlt werden.

ierbei ist  $n$  an der Stelle genommen, an der der tegrand seinen größten Wert hat, also bei  $\varphi_n = n\pi/l$ .

Wie man sieht, entspricht Gl. (35) hinsichtlich des Frequenzganges der bereits von K. GÖSELE [3] abgeleiteten Formel für die durch den Randeinfluß bedingte Abstrahlung (siehe Gl. (2)).

Gl. (35) und Gl. (2) unterscheiden sich durch den Faktor 4. Das kommt daher, daß im einen Fall der Berechnung der Spitzenwert einer fortlaufenden Welle zugrunde liegt, während im anderen Fall der Mittelwert von stehenden Wellen betrachtet wird. Außerdem unterscheidet sich die hier unterrichtete Anordnung in ihrem geometrischen Aufbau von der von GÖSELE untersuchten. Während GÖSELE die Abstrahlung in einen Halbraum berechnete, wird hier die Abstrahlung in einen Quader behandelt. Es sind also senkrecht zur strahlenden Fläche zwei weitere Wände angebracht (siehe Bild 2).

Nun muß noch die Frage beantwortet werden, ob  $P_{12}$  oder  $P_{102}$  mehr zur abgestrahlten Leistung beiträgt. Zu diesem Vergleich muß man in Gl. (35) statt der mittleren Schnelle die anregende Kraft einsetzen, d. h. man muß das Verhältnis von anregender Kraft zu mittlerer Schnelle der Platte kennen. Diese Größe erhält man durch Integration von Gl. (34). Man kann dabei annehmen, daß nur die Eigenschwingungen, deren Resonanzfrequenzen im Integrationsbereich liegen, einen nennenswerten Beitrag zur mittleren Schnelle liefern. Man erhält unter dieser Voraussetzung

$$\overline{v^2} = \frac{F_0^2}{\rho^2 h^2 l^2} \frac{\pi}{2 \eta \omega} \frac{\Delta N}{\Delta \omega}. \quad (36)$$

In dieser Gleichung ist  $\Delta N$  die Anzahl der Eigenfrequenzen im Bereich  $\Delta \omega$ . Sie ist im eindimensionalen Fall näherungsweise durch

$$\Delta N \approx \frac{l}{2 \pi \omega} k_B \Delta \omega \quad (36 a)$$

gegeben. Setzt man diese Ausdrücke in Gl. (35) ein, so folgt

$$P_{102} \approx \frac{\rho_0 c_0}{4} \frac{F_0^2 k_0}{\rho^2 h^2 \omega^2} \frac{2}{k_B l \eta}. \quad (37)$$

Vergleicht man diese Formel mit Gl. (32), so sieht man, daß für  $k_B l \eta > 2$  die gesamte abgestrahlte Leistung durch Gl. (32), also durch die Abstrahlung des Biegewellennahfeldes bestimmt ist, während für  $k_B l \eta < 2$  der Randeinfluß entscheidend ist, also die abgestrahlte Leistung nach Gl. (35) oder (37) berechnet werden kann. Die Abstrahlung des Biegewellennahfeldes wird also — was auch vollkommen einleuchtet — um so wichtiger, je größer und je mehr gedämpft eine Platte ist.

### 3.3. Behandlung des zweidimensionalen Falles

Für eine rechteckige, an allen Seiten drehbar gelagerte Platte mit der Länge  $l$  und der Breite  $b$  kann man dieselben Rechnungen wie im Abschnitt 3.2 machen. Man muß nur

$$\varphi_n = \sin \frac{n_1 \pi}{l} \sin \frac{n_2 \pi}{b}, \quad \psi_m = \cos \frac{m_1 \pi}{l} \cos \frac{m_2 \pi}{b},$$

$$k_{zm} = \sqrt{k_0^2 - \frac{m_1^2 \pi^2}{l^2} - \frac{m_2^2 \pi^2}{b^2}} \quad (38)$$

setzen.

Mit denselben Näherungen wie im Abschnitt 3.2 ergibt sich

$$P_1 \approx \frac{\rho_0 c_0}{4 \pi} \frac{F^2 k_0^2}{\rho^2 h^2 \omega^2}. \quad (39)$$

Das ist aber, wie ein Vergleich mit Gl. (20) zeigt, genau die Abstrahlung des Biegewellennahfeldes.

Für die Leistung  $P_2$  erhält man mit einigen zusätzlichen Näherungen

$$P_2 \approx \frac{64}{\pi} \rho_0 c_0 \frac{k_0^2}{k_B^4} \overline{v^2}. \quad (40)$$

Es ist also auch in diesem Fall  $P_2/v^2$  frequenzunabhängig.

Für das Verhältnis  $F^2/v^2$  gilt wieder Gl. (36), allerdings in diesem Fall mit

$$\Delta N \approx \frac{1}{4 \pi \omega} k_B^2 S \Delta \omega.$$

Somit hat man schließlich

$$P_2 \approx \frac{\rho_0 c_0}{4 \pi} \frac{F^2 k_0^2}{\rho^2 h^2 \omega^2} \frac{32}{k_B^2 S \eta}. \quad (41)$$

Ein Vergleich mit Gl. (39) ergibt, daß für  $k_B^2 S \eta > 32$  die Abstrahlung des Biegewellennahfeldes und für  $k_B^2 S \eta < 32$  der Randeinfluß überwiegt.

## 4. Vergleich mit den Messungen

Um die eben abgeleiteten Formeln meßtechnisch prüfen zu können, muß man die Schnelle einer schwingenden Platte, die von ihr abgestrahlte Leistung und die Biegesteife bzw. die sogenannte Grenzfrequenz ermitteln. Die Bestimmung der mittleren Schnelle ist sehr einfach. Sie erfolgt mit Hilfe eines absolut geeichten Beschleunigungsabtasters. Die Grenzfrequenz  $f_G$  der untersuchten Platten, die angibt, bei welcher Frequenz die Biegewellenlänge gleich der Luftwellenlänge ist, und die sich aus der Biegesteife  $B$  nach der Gleichung

$$f_G = \frac{c_0^2}{2 \pi} \sqrt{\frac{\rho h}{B}} \quad (42)$$

errechnet, ist ebenfalls leicht festzustellen. Sie wurde teilweise aus den Biege-Eigenfrequenzen von Streifen aus dem benutzten Plattenmaterial, teilweise aus

der Durchbiegung der Platten ermittelt. Für den Zusammenhang zwischen der Durchbiegung  $d$  eines horizontal gelagerten an beiden Enden unterstützten Streifens der Länge  $l$  und der Grenzfrequenz  $f_G$  gilt nach L. CREMER und A. EISENBERG [15]

$$f_G = 5200 \sqrt{d/l^2} \quad (d \text{ in cm, } l \text{ in m}). \quad (42 a)$$

Aus der Grenzfrequenz ergibt sich die Biegewellenzahl  $k_B$  bzw. das hier interessierende Verhältnis  $k_0/k_B^2$  zu (siehe Gl. (1 a))

$$\frac{k_0}{k_B^2} = \frac{c_0}{2\pi f_G}. \quad (43)$$

Während die Schnelle und die Grenzfrequenz sich relativ genau ermitteln lassen, ist die Messung der abgestrahlten Leistung, speziell bei tiefen Frequenzen, mit einer gewissen Unsicherheit in der Größe von etwa  $\pm 4$  dB behaftet. Diese Unsicherheit ergibt sich zwangsläufig, weil die Abmessungen der Platten stets etwa 1 bis 2 m, also vergleichbar mit der Luftwellenlänge waren. Während beim Übergang von Gl. (31) auf Gl. (32) über viele Eigenresonanzen der Luft im betrachteten Frequenzbereich gemittelt wird, lagen bei den untersuchten Platten teilweise nur eine oder zwei Eigenresonanzen innerhalb des zur Anregung benutzten Terzrauschens. Weiterhin ist zu beachten, daß auch hinsichtlich der geometrischen Anordnung und der Randbedingungen die untersuchte Konstruktion und das der Theorie zugrunde liegende Modell nicht ganz übereinstimmen. Beispielsweise waren die Platten am Rande nicht drehbar gelagert, sondern auf ein Lattengestell aufgenagelt. Außerdem wurde nicht die Abstrahlung in einen auf einer Seite schluckenden Quader untersucht; vielmehr befanden sich die schwingenden Platten in der Öffnung eines halligen Raumes (siehe Bild 4).

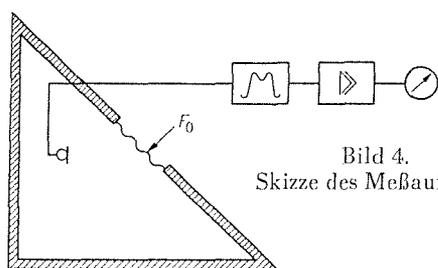


Bild 4.  
Skizze des Meßaufbaus.

Die abgestrahlte Leistung  $P$  wurde aus dem mittleren effektiven Schalldruckquadrat und der Schluckfläche  $A$  nach der Gleichung

$$P = p_{\text{eff}}^2 \frac{A}{4 \rho_0 c_0} \quad (44)$$

bestimmt. Wenn man Gl. (44) zur Bestimmung der abgestrahlten Leistung benutzt, setzt man u. a. voraus, daß das in der Nähe der Platte vorhandene

Luftschall-Nahfeld auf einen so kleinen Raum begrenzt ist, daß es keinen nennenswerten Beitrag zum mittleren Schalldruckquadrat im Raum liefert.

Um zu prüfen, ob diese Voraussetzung erfüllt ist, wurde an einer Platte, die in einen stark gedämpften Raum strahlte, die Abnahme des Schalldrucks mit der Entfernung von der Platte gemessen. Es zeigte sich dabei, daß der Einfluß des Nahfeldes nur nachweisbar ist, wenn das Mikrophon weniger als eine halbe Biegewellenlänge von der Plattenoberfläche entfernt ist. Da die Biegewellenlänge stets viel kleiner war als die Abmessungen des Meßraumes, kann der Einfluß des Luftschall-Nahfeldes vernachlässigt werden.

Es ist zwar ohne allzu große Schwierigkeiten möglich, eine Meßanordnung aufzubauen, die dem theoretisch untersuchten Modell besser entspricht. Es wurde jedoch davon Abstand genommen, weil die benutzte Meßanordnung in der Praxis weitaus häufiger vorkommt. Außerdem ist der Unterschied der Anordnung nicht prinzipieller Natur, so daß man — wie die Messungen zeigen zu Recht — vermuten kann, daß die erhaltenen Meßergebnisse innerhalb gewisser Streuungen mit den abgeleiteten Formeln übereinstimmen müssen.

#### 4.1. Abstrahlung des Biegewellen-Nahfeldes

Da die Abstrahlung des Biegewellen-Nahfeldes bei sehr biegeweichen, gedämpften Platten besonders ausgeprägt auftritt, wurden zur Untersuchung dünne Platten aus Hartfaser, Gips und Blech benutzt. Die Anregung erfolgte mit Hilfe eines elektrodynamischen Körperschallsenders, der mit Terzrauschen gespeist wurde.

Zur Überprüfung von Gl. (15 a) bzw. (32) wurde auf der Hartfaserplatte eine Holzlatte starr befestigt und mit dem Körperschallsender angeregt. Man hat damit, wenn auch nur in sehr grober Näherung, auf der Platte Biegewellen, die sich senkrecht zur Latte ausbreiten. Es liegt also der eindimensionale Fall vor.

Die Ergebnisse, die aus der Mittelung verschiedener Anregungsorte gewonnen wurden, sind in Bild 5 über der Frequenz aufgetragen. Die als Ordinate eingezeichnete Größe  $10 \log \sigma_L$ , errechnet sich aus der abgestrahlten Leistung und der Schnelle der Latte nach der Gleichung

$$\sigma_L = \frac{2P}{\rho_0 c_0 S |v(0)|^2} \quad (45)$$

( $S$  Fläche der Platte).

Die Größe  $\sigma_L$ , die den Vorteil hat, dimensionslos zu sein, ergibt sich theoretisch aus Gl. (15 a) zu

$$\sigma_L = \frac{4k_0}{k_B^2 l} = \frac{2c_0}{\pi f_G l}. \quad (46)$$

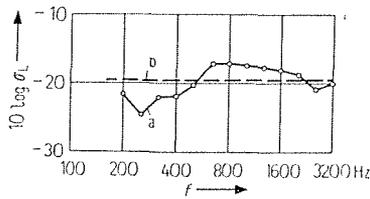


Bild 5.

Abstrahlung des Biegewellen-Nahfeldes von einer längs einer Linie angeregten Hartfaserplatte von 1,35 m × 2,07 m und 4 mm Dicke; Grenzfrequenz etwa 8000 Hz.

Kurve a: gemessene Werte,  
Kurve b: nach Gl. (46) berechnete Werte.

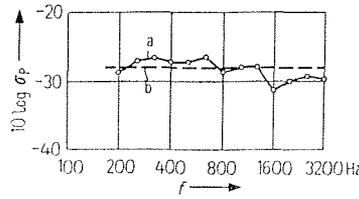


Bild 6.

Abstrahlung des Biegewellen-Nahfeldes von einer punktförmig angeregten Hartfaserplatte (Abmessungen siehe Bild 5).

Kurve a: gemessene Werte,  
Kurve b: nach Gl. (47) berechnete Werte.

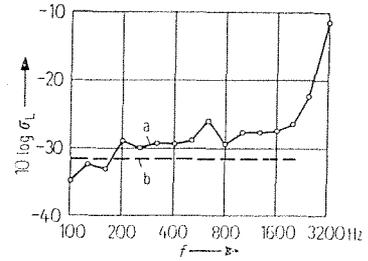


Bild 7.

Abstrahlung des Biegewellen-Nahfeldes von einer punktförmig angeregten Gipsplatte von 3 m × 1,7 m; Grenzfrequenz etwa 2800 Hz.

Kurve a: gemessene Werte,  
Kurve b: nach Gl. (47) berechnete Werte (gültig für  $f < 2000$  Hz).

Wie man sieht, stimmen die in Bild 5 eingezeichneten berechneten und gemessenen Kurven einigermaßen überein.

Ein weiteres Meßergebnis an der gleichen Platte zeigt Bild 6. In diesem Fall erfolgte die Anregung nicht über eine Latte, also linienförmig, sondern punktförmig. Das heißt, der Körperschallsender, der einen Schwingkopf von etwa 2,5 cm Durchmesser hatte, war an der Platte direkt befestigt. Es lag also der zweidimensionale Fall vor. Aus diesem Grund wurde auch der sogenannte Punktabstrahlgrad  $\sigma_p$  bestimmt. Er ergibt sich analog zu Gl. (45), wenn man die abgestrahlte Leistung zur Schnelle an der Anregetaste in Beziehung setzt. Vergleicht man diesen Ausdruck mit Gl. (20) bzw. (39), so ergibt sich für den theoretischen Wert

$$\sigma_p = \frac{8}{\pi^3} \frac{a_0^2}{f_G^2 S}. \quad (47)$$

Wie man aus Bild 6 sieht, stimmt der so errechnete Wert relativ gut mit den Meßergebnissen überein. Ein Vergleich von Bild 5 und Bild 6 zeigt übrigens, daß bei punktförmiger Anregung sehr viel weniger abgestrahlt wird als bei linienförmiger. Das bedeutet z. B., daß eine punktförmige Befestigung von Vortischalen sehr viel günstiger ist als eine Befestigung an einer Latte oder dergleichen.

Um zu kontrollieren, wie sich die abgestrahlte Leistung verhält, wenn die Platte an mehreren Punkten gleichzeitig angeregt wird, wurden drei Klötzchen auf der Platte befestigt und mit einer Holzlatte verbunden. (Der Abstand der Klötzchen betrug zwischen 30 und 60 cm.) Dann wurde die Latte mit dem Körperschallsender angeregt. Die Messung zeigte, daß die Schwingungsamplitude der Klötzchen, also die Schnelle der Platte an den drei Anregeorten, etwa gleich war, und daß die abgestrahlte Leistung ziemlich genau dreimal so groß war wie bei Anregung an einem Punkt. Man kann daraus

schließen, daß sich bei genügendem Abstand der Anregeorte voneinander die abgestrahlten Leistungen addieren.

Bild 7 zeigt ein weiteres Ergebnis, das an einer punktförmig angeregten Gipsplatte erhalten wurde. An diesem Bild sieht man sehr deutlich den Gültigkeitsbereich der Theorie. Die allen Formeln zugrunde liegende Voraussetzung, daß die Biegewellenlänge kleiner ist als die Luftwellenlänge, ist nämlich nur bis zur Grenzfrequenz, d. h. in diesem Fall bis zu 2800 Hz erfüllt. Wie man sieht, ist die Theorie für Frequenzen, die mehr als eine halbe Oktave unter der Grenzfrequenz liegen, gültig.

Ein weiteres Ergebnis, bei dem die der Theorie zugrunde liegenden Voraussetzungen nicht mehr erfüllt sind, zeigt Bild 8. Es handelt sich hier um eine Blechplatte von 1 mm Stärke, die durch aufgeklebte Eisenplättchen sehr biegeweich gemacht wurde. Die Anregung der Platte erfolgte mit einem Körperschallsender, dessen Schwingkopf einen Durchmesser von 6 cm hatte. Man kann in diesem Fall nicht mehr von punktförmiger Anregung sprechen, weil bereits bei 500 Hz der Radius des anregenden Schwingkopfes ein Viertel der Biegewellenlänge ist. In Bild 8 ist daher außer dem nach Gl. (47) zu erwartenden Wert für punktförmige Anregung der „Punktabstrahlgrad“ einer Kolbenmembran von 6 cm Durchmesser aufgetragen.

Wie man sieht, liegt die gemessene Kurve immer etwas über den beiden angegebenen theoretischen Kurven, weil sich die Abstrahlung von der Kolbenmembran und die Abstrahlung vom Biegewellennahfeld addieren. Da die Abstrahlung des Biegewellennahfeldes der Strahlung von einer Kolbenmembran mit dem Radius  $\lambda_B/4$  entspricht, kann man vermuten, daß die Abstrahlung von einer Platte, die mit einem Schwingkopf vom Radius  $a$  angeregt wird, und die natürlich auch eine Art Nahfeld hat, der Abstrahlung einer Kolbenmembran mit dem Radius  $a + \lambda_B/4$

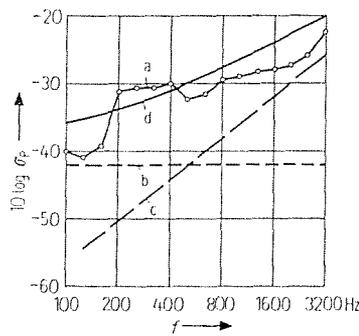


Bild 8. Abstrahlung von einer Blechplatte mit aufgeklebten Massen. Fläche der Platte 1 m x 2 m. Grenzfrequenz etwa 16 000 Hz. Der anregende Schwingkopf hatte einen Durchmesser von 6 cm. Kurve a: gemessene Werte, Kurve b: bei punktförmiger Anregung nach Gl. (47) berechnete Werte, Kurve c: Abstrahlung von einer Kolbenmembran mit  $a=3$  cm Radius, Kurve d: Abstrahlung von einer Kolbenmembran mit dem Radius  $a + \lambda_B/4$ .

entspricht. Die unter dieser Annahme errechnete Kurve ist in Bild 8 mit eingezeichnet. Da die Übereinstimmung mit der Meßkurve relativ gut ist, kann man annehmen, daß sich auf diese Weise die Abstrahlung von biegeweichen Platten errechnen läßt, wenn die Anregung durch ein System erfolgt, dessen Abmessungen mit der Biegewellenlänge vergleichbar sind.

#### 4.2. Abstrahlung von schwachgedämpften Platten

Während bei den eben beschriebenen Platten stets  $k_B l \eta > 2$  bzw.  $k_B^2 S \eta > 32$  ist, also die Abstrahlung stets durch das Biegewellennahfeld, d. h. durch  $P_1$  in Gl. (32) oder (39) bestimmt ist, muß zur Überprüfung von Gl. (40), d. h. für die Messung des Randeinflusses, eine Platte mit kleiner innerer Dämpfung und großer Biegesteifigkeit gewählt werden.

Da von K. GÖSELE [11] schon Messungen zur Abstrahlung von schwachgedämpften Platten gemacht wurden und die erhaltenen Ergebnisse (abgesehen von einer Ausnahme) sowohl mit der von GÖSELE angegebenen Formel als auch mit Gl. (40) näherungsweise übereinstimmen, wurde nur eine Platte untersucht. Es handelte sich dabei um eine Holzfaserverplatte (Novopan) mit einer Grenzfrequenz von etwa 2000 Hz. In diesem Fall wurde die abgestrahlte Leistung in Abhängigkeit von dem durch Messung an vielen Punkten der Platte erhaltenen mittleren Schnellequadrat  $\bar{v}^2$  bestimmt. Entsprechend wurde der durch

$$s = \frac{2P}{\rho_0 c_0 \bar{v}^2 S} \quad (48)$$

definierte Abstrahlgrad ermittelt. Für den theoretischen Wert des Abstrahlgrades ergibt sich nach Gl. (40)

$$s = \frac{32}{\pi^3} \frac{c_0^2}{f_G^2 S} \quad (49)$$

Dieser Wert, der bis etwa 1400 Hz gültig ist, ist in Bild 9 mit eingezeichnet und stimmt in diesem Bereich mit den Meßergebnissen näherungsweise überein.

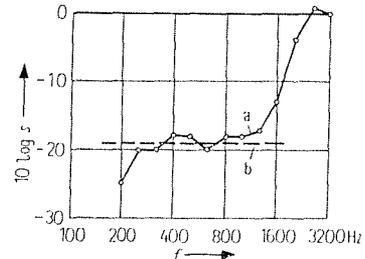


Bild 9. Abstrahlung von einer Holzfaserverplatte (Novopan) von 1,35 m x 2,07 m und 13 mm Dicke; Grenzfrequenz etwa 2000 Hz. Kurve a: gemessene Werte, Kurve b: nach Gl. (49) berechneter Abstrahlgrad.

Herrn Professor L. CREMER bin ich für die Stellung der Aufgabe und für zahlreiche wertvolle Ratschläge und Hinweise zu großem Dank verpflichtet.

Dem Bundesministerium für Wohnungsbau danke ich, daß es durch die Bereitstellung von finanziellen Mitteln die Durchführung der vorliegenden Untersuchungen ermöglichte.

(Eingegangen am 15. Januar 1959.)

#### Schrifttum

- [1] CREMER, L., Die wissenschaftlichen Grundlagen der Raumakustik, Bd. III, § 62. S. Hirzel Verlag, Leipzig 1950.
- [2] BRILLOUIN, J., Acustica 2 [1952], 65.
- [3] GÖSELE, K., Acustica 3 [1953], 243.
- [4] WESTPHAL, W., Acustica 4 [1954], 603.
- [5] Lighthill, M. J., Fourier analysis and generalised functions. Cambridge Univ. Press 1958.
- [6] SNEDDON, I. N., Elements of partial differential equations. McGraw-Hill Book Co., New York 1957.
- [7] CREMER, L., The propagation of structure-borne sound. Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research (Germany), Report No. 1 (Series B).
- [8] MORSE, P. M., Vibration and sound. McGraw-Hill Book Co., New York 1948.
- [9] SCHOCH, A., Akust. Z. 2 [1937], 113.
- [10] CREMER, L. und SCHWANTKE, G., Acustica 7 [1957], Beiheft 1, 329.
- [11] GÖSELE, K., Acustica 6 [1956], 94.
- [12] GÖSELE, K., Schallabstrahlung von Platten, die zu Biegeschwingungen angeregt sind. Mitteilung aus dem Institut f. tech. Physik, Stuttgart.
- [13] ZENER, C., Phys. Rev. 59 [1942], 669.
- [14] CREMER, H. und L., Frequenz 2 [1948], 61.
- [15] CREMER, L. und EISENBERG, A., Bauplanung und Bautechnik 2 [1948], 235.
- [16] SKUDRZYK, E., J. acoust. Soc. Amer. 30 [1958], 1150.